Manfred Borovcnik, Klagenfurt

Aufgaben in der Stochastik – Chancen jenseits von Motivation

Zusammenfassung: Aufgaben lassen einen Begriff oder eine Methode einüben. Sie mögen einen Begriff illustrieren; oder sie motivieren Lerner. Mit Chancen jenseits von Motivation ist gemeint, dass Aufgaben substantiell Seiten eines Begriffs auftun, die ohne diese Aufgaben schwer abzuklären sind. Dazu zählen auch Aspekte von Begriffen, die über die in einer Definition enthaltenen Eigenschaften hinaus gehen. In diesem Aufsatz werden zwei Blickrichtungen gewählt: Wie verstehen Personen die Begriffe? Wie wendet man die Begriffe vernünftig an? Beim Begriff Wahrscheinlichkeit gibt es eine Reihe von persönlichen Strategien, die durchaus zielführend sein können; häufig aber werden sie unreflektiert eingesetzt und führen so zu inadäquaten Rekonstruktionen der Situation und zu entsprechenden Antworten. Durch mehrfache Analyse einfacher Items aus der empirischen Forschung zum Wahrscheinlichkeitsbegriff gewinnt man Einsichten, wie Lernende denken mögen und inwieweit man dies erfolgreich in den Unterricht einbauen kann. Anwendungen von stochastischen Modellen haben einen eigenen Charakter; sie werden jedenfalls auch häufig subjektiv als anders als in anderen Bereichen der Mathematik empfunden. Das mag auch daran liegen, dass der Modellbegriff für die Stochastik einen anderen Stellenwert hat. An Aufgaben soll diskutiert werden, dass Wahrscheinlichkeitsmodelle eher den Charakter von Szenarien haben; Szenarien haben, anders als Modelle, nicht die Intention, besonders gut auf die reale Situation zu passen. Dennoch kann man aus ihnen Erkenntnisse ziehen, die eine Entscheidung transparent unterstützen. Der Szenario-Gedanke wird an Aufgaben zu speziellen Verteilungen vertieft.

1. Vorbemerkungen

Wurzeln des Begriffs Wahrscheinlichkeit reichen zurück in die Antike und sind eng mit Gottesentscheidungen und Glücksspiel verbunden (David 1962). Daher wundert es wenig, dass Situationen unter Unsicherheit und damit zusammenhängende Begriffe stark emotional gezeichnet sind. Ein Umstand, der einer rationalen Durchdringung abträglich ist. Man kann auch Abwehr und fehlende Akzeptanz unter jenen orten, welche durchaus in der Lage sind, die Begriffe und Methoden zu verstehen.

Gottesentscheidungen vs. Mathematische Modellierung

In der Antike war das Orakel von Delphi ein beliebter Ort, um die Zukunft von der Priesterin zu „erfragen". Pythia nimmt dabei ein kultisches Bad und begibt sich dann, begleitet von zwei Priestern, in den Apollo-Tempel, wo sie sich über einer Erdspalte, aus der süßliche Dämpfe emporsteigen, in Trance bringt (s. Abb. 1). Dann wirft sie 4-5 Astragali und sagt die Zukunft voraus. Ärmere Leute durften nur Fragen stellen, die sich mit „Ja" oder „Nein" beantworten lassen. Dann griff Pythia in einen Behälter, der mit weißen und schwarzen Bohnen gefüllt war. Entsprechend der Farbe gab sie die Antwort.

Im alten Rom war das Glücksspiel durch keines der Verbote einzudämmen. Die Römer ihrerseits berichten, dass es die wilden Germanen seien, die sich selbst als Einsatz setzen, wenn sie über kein Geld mehr verfügten, und „freudig" in die Sklaverei gingen, wenn sie verloren. Fasst man das Ergebnis eines Glücksspiels als Gottesentscheid auf, so war klar, dass man – auch den vordergründig so schweren Entscheid der persönlichen Versklavung – annahm, ja mitunter sogar herausforderte. Es konnte ja nichts passieren, wenn nicht der Entscheid von „oben" es so wollte. Sieht man die Situation heute an, so hat sich nicht viel gegenüber der Antike geändert:

Blickt man nach Indien, so bemerkt man, dass an jeder Straßenecke lauthals Lose angeboten werden, für welche die Leute jenes Geld bezahlen, das eigentlich für die tägliche Essensration vorgesehen war.

Blickt man nach Australien, so merkt man, dass das erlaubte Glücksspiel solche Auswüchse angenommen hat, dass man an staatliche Präventionsmaßnahmen denkt, die nicht nur Suchtbekämpfung sondern Aufklärung der Jugend durch gezielten Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule zum Ziel haben (s. Peard 2008).

Abb. 1: Antike Einbindung des Zufalls.

Ist Ω die Grundmenge eines Zufallsexperiments und ist $\{B_j,\ j \in \{1, 2, ..., k\}$ eine Zerlegung des Grundraumes, d. h., es gilt:

i) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, ..., k\}$ und

ii) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$,

so gilt (Bayes-Theorem):

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \cdot \mathrm{P}(A \mid B_i)}{P(B_j) \cdot \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(A \mid B_j)}$$

Abb. 2: Moderne Einbindung des Zufalls.

In der übrigen westlichen Welt sind die Umstände ähnlich; das Glücksspiel nimmt einen hohen Rang ein. Kein Staat kann es sich leisten, kein Lotto selbst zu organisieren, ansonsten tragen die Leute das Geld in benachbarte Länder und setzen – trotz Verbots –ihr Geld dort ein. Österreich „musste" 1986 ein staatliches Lotto, bei uns 6 aus 45, einführen, wollte man den Geldabfluss nach Deutschland, in die Schweiz oder nach Italien vermeiden. Und es geht um große Beträge, in einer einzigen Runde etwa um 14-16 Mio. €. Und das in einer Zeit, wo die Glücksspiele, auch die staatlich durchgeführten, eine unglaubliche „Inflation" erleben.

Obwohl die Leute wissen, dass es sich beim Lotto um eines der unfairsten Glücksspiele handelt (es wird ja nur die Hälfte der Einsätze auf die Gewinner verteilt, was bedeutet, der Erwartungswert pro eingesetztem Euro beträgt -0,50), spielen sie, als ob „sie einen Gottesentscheid" zur Besserung ihres Lebens erwarteten. Und sie akzeptieren geduldig den gegenteiligen Entscheid *halb*wöchentlich und setzen ihr Spiel fort. Letztendlich trägt auch ein kalkülhaft dominierter Unterricht auf allen Ebenen (Schule oder Universität) in Stochastik dazu bei, dass Menschen ihre unklaren und inadäquaten Vorstellungen nicht verändern. Als ein Beispiel sei die Behandlung der Bayes-Formel angeführt (Abb. 2).

Was wundert einen dann die häufig anzutreffende Reaktion auf die folgende Fragestellung: Die Krankheit *KK* hat eine Verbreitung von 0,1%; die Diagnose eine Sicherheit von 99%, d. h., wenn die Person *KK* hat, so ergibt sich mit 99% Sicherheit die Diagnose positiv.

„Ja, dann ist eine positive Person zu 99% krank."

Stellenwert von Intuitionen für die Akzeptanz des Gelernten

Die Wurzeln des Zufalls reichen in der Antike tief in mystische Gebiete. Gottesentscheidungen werden per Zufall getroffen, wichtige Entscheidungen werden abgeschoben auf den Zufall; wenn „Gott so entscheidet, müssen wir uns fügen". Aus Bibel und Talmud sind solche, dem Zufall überlassene Entscheidungen bekannt. Der Zufall bringt auch einen Charakter von Gerechtigkeit in solche Entscheidungen, etwas, was in der Laplaceschen Gleichwahrscheinlichkeit auch direkt zum Ausdruck kommt. Neben die griechische Göttin Tyche, welche den Wechsel der Dinge launenhaft herbeiführt, stellt sich die römische Justitia, welche blind, also ohne Ansehen der Person, Recht spricht. Nicht umsonst haben auch die statistischen Büros Ende des 19. Jh. bei der Einführung von zufälliger Auswahl anstelle der

Totalerhebungen mit der Analogie einer Justitia „geworben“, die blind in eine Urne greift und eine „gerechte Stichprobe“ erstellt (Kiaer1899).

Nicht leichter wird es, den Zufall ordentlich einzuschätzen und verstehen zu lernen, wenn man in die Physik blickt. Zufall und Kausalität stehen am Schnittpunkt zweier gänzlich verschiedener Ordnungsprinzipien. In der Quantenmechanik kommen aber stochastische Modelle in die Physik herein und stellen die alte Kausalität auf den Kopf (Styer, D. F. 2000). So gründlich, dass selbst Einstein sich „gewehrt“ hat. Sein berühmtes „Gott würfelt nicht“ wurde ihm so angelastet, als ob er die neuen Modellbildungen nicht gänzlich nachvollziehen konnte. Aber letztlich geht aus der Kausalitätsdebatte nie deutlich hervor, dass in den stochastischen Modellen nur eine „Sichtweise der Wirklichkeit“ zum Tragen kommt und nicht die Wirklichkeit selbst. In der Zwischenzeit melden sich langsam auch andere Physiker zu Wort, die im Ansatz verborgener Variabler eine Chance sehen, dem in sich von Zufall und stochastischer Modellbildung durchdrungenen Weltbild der modernen Physiker noch etwas entgegen zu setzen (s. etwa Dürr et al 2004).

Abseits der Feinheiten der modernen, quantenmechanischen Modellbildung, die genuin und scheinbar unverzichtbar den Zufall einbaut, gibt es auch naive Querverbindungen zwischen Kausalität und Zufall. Zufall wird auch gedacht als etwas, was ohne besondere Ursache erzeugt wird. Dieses naive Verständnis wird u. a. ausgenützt, wenn man stochastische Unabhängigkeit als Fehlen kausaler Einflüsse interpretiert und in so einem Falle Modelle auf der Basis der Unabhängigkeit zur Anwendung bringt. Auch hier gibt es offene Türen für Missverständnisse.

Was dem Verständnis stochastischer Modelle und darüber hinaus einer Akzeptanz der Modelle besonders entgegen steht, ist die Tatsache (die durch viele empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis gut belegt ist), dass Menschen mit Situationen unter Unsicherheit und mit stochastischen Begriffen inadäquate Vorstellungen verbinden, die mit ganz besonders starken Emotionen behaftet sind. Diese Emotionen mögen es nicht nur verhindern zu akzeptieren, was man vielleicht schon verstehen könnte, sondern sie behindern auch ein Verstehen ganz direkt. Man denke etwa an das Drei-Türen-Problem (Monty Hall), in welchem ein Moderator dem Kandidaten eine von drei Türen zur Wahl stellt (s. vos Savant o. J.). Hinter einer ist ein Hauptpreis verborgen, hinter den beiden anderen eine Ziege, die beim Öffnen noch publikumswirksam meckert. Das an sich einfache Problem hat an allen Orten auch unter gebildeten, sprich auch Mathematikern, eine ungewöhnliche Lawine an Emotion und Abwehr losgetreten. Dies, obwohl viele davon in der Lage sind, ein gut formuliertes Argument zur richtigen Lösung zu verstehen. Sie haben es schlichtweg weit von sich weggeworfen!

Einige einfache Beispiele, die in der empirischen Forschung zum Wahrscheinlichkeitsverständnis verwendet wurden, sollen die angesprochenen Aspekte verdeutlichen.

Szenario-Charakter von stochastischen Modellen

Im üblichen Modellverständnis versucht man, ein Modell als Abbild der Realität möglichst getreu den Verhältnissen in der Realität nachzubauen. Und zu verfeinern. Es muss dann auch die Möglichkeit vorhanden sein, die *noch* bestehende Diskrepanz zwischen Modell und realer Situation zu beurteilen.

Zum einen gibt es in der Stochastik nur Methoden zur Beurteilung, wie gut ein Modell passt, welche wiederum auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff zurückgreifen. Sowohl Konfidenzintervalle als auch statistische Tests haben solche Bestandteile. Sie setzen zudem den Typ einer Verteilung voraus. Will man auch den überprüfen, so befindet man sich in der methodologisch „unglücklichen“ Lage, eine Nullhypothese „bestätigen“ zu sollen, was ja nicht geht. Popper (1935, 2005) hat zu diesem Behufe die Logik des wiederholten Testens ersonnen: eine Hypothese, welche solche Tests oftmals übersteht (also nicht abgelehnt wird), gewinnt hierbei an „Glaubwürdigkeit“ (dies jedoch ohne Quantifizierung und ohne Bezug darauf, wie sorgfältig denn sie wiederholt getestet wurde).

Zum anderen muss man einen Vorgang unter denselben Bedingungen wiederholen können, was für viele Anwendungen nur fiktiv zutrifft. Das macht eine Überprüfung über die relativen Häufigkeiten obsolet. Versteht man Wahrscheinlichkeit als (subjektiven) Grad des Vertrauens, so kann man das Modell nur durch Plausibilitätsüberlegungen, jedenfalls nicht aber durch relative Häufigkeiten in wiederholten Situationen überprüfen. Und viel mehr Situationen als man sich generell eingestehen möchte, sind vom Charakter der Einmaligkeit der Situation geprägt. Das macht das Interpretationsmuster „relative Häufigkeit“ sowieso zu einer bloßen Metapher.

Weiters gibt es alternativ zu vielen stochastischen Modellen auch ganz andere, etwa ausgedrückt durch Differentialgleichungen. Es gibt keinen natürlichen Vorzug für die eine oder die andere Modellierung. Das ruft einen gänzlich anderen Gedanken auf den Plan. Wieso nicht stochastische Modelle als Szenarien verstehen, mit welchen man die Wirklichkeit auf der Basis „was wäre, wenn ..“ untersucht? Obwohl man dann weiß, dass ein gewähltes Szenario keineswegs eine überaus gute Beschreibung der Realität erbringt, kann man daraus einige Eigenheiten ablesen. Man versteht noch mehr über die Bedeutung einiger wichtiger Einflussgrößen, wenn man deren Werte abändert und die Konsequenzen im Szenario untersucht. Im Vergleich zu alternativen Szenarien erhält man noch mehr Klarheit über relevante Einflussfaktoren für die reale Situation und kann damit durchaus transparente Entscheidungshilfen gewinnen. Wohl gemerkt, obwohl man weiß, dass die Szenarien nicht überaus gut passen. Das erscheint zunächst paradox, soll aber an einigen Beispielen erläutert werden. Jedenfalls räumt der Szenario-Gedanke mit einer primitiven Interpretation von Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit auf.

Der Szenario-Gedanke soll paradigmatisch an Beispielen entwickelt werden: Dazu dient ein Beispiel aus der Zuverlässigkeitstheorie, das die Zuverlässigkeit eines einfachen technischen Systems aus der seiner Bauteile berechnen lässt. Es folgt das klassische Beispiel der Versicherung aus der Sicht eines Polizzeninhabers und der Versicherungsgesellschaft.

Dieser Gedanke soll dann auch noch an üblichen Beispielen aus Übungen zur Stochastik an der Universität weiter ausgebaut werden. Die vorgezeigten Beispiele können mit Abstrichen auch in der Sekundarstufe eingesetzt werden, zumal ohnehin die mathematischen Schwierigkeiten durch die Berechnung in einer Tabellenkalkulation abgefedert werden (sollen).

2. Lehrinterview zur aktiven Beeinflussung von privaten Vorstellungen

Primäre Intuitionen sind nach Fischbein (1987) rohe, ungeschliffene Vorstellungen, welche vor einer gezielten Unterweisung in den Begriffen bei den Personen verhaftet sind; welche beim Begriff Wahrscheinlichkeit zudem starke emotionale Züge tragen. Diese emotionalen Bindungen behindern eine rationale Durchdringung, selbst wenn die Lernenden über die erforderlichen Fähigkeiten verfügen, die Begriffe zu verstehen. Sie können den Lernfortgang nachhaltig in Frage stellen oder die Akzeptanz des Erlernten einschränken (siehe die erbitterten Argumente in der Diskussion des Drei-Türen-Problems bei vos Savant o. J.). Nach Fischbein sollten diese durch sekundäre Intuitionen, die aus der unterrichtlichen Durchdringung herauswachsen sollen, überlagert und ersetzt werden. Man weiß jedoch (auch Fischbein 1987, oder Borovcnik und Bentz 1990, 2003), dass diese sehr hartnäckig sind, sodass Gelerntes Nachrang zu haben scheint. Hier wird der Stellenwert von Intuitionen umrissen und einige Items aus der empirischen Forschung zum Wahrscheinlichkeitsbegriff mögen illustrieren, dass

Lernende selbst eindeutig erscheinende Aufgaben uminterpretieren nach ihren Vorstellungen und Bedürfnissen. Das mögen sie dann auch in der mathematischen Unterweisung tun.

Die Problematik von Intuitionen und ihr Verhältnis zu mathematischen Begriffen

Schon eine einfache Wahrscheinlichkeitsaussage wirft Probleme auf. Was bedeutet eigentlich $P(K)=1/2$ beim Münzwerfen? Oder gar $P(GAU)=10^{-15}$ für einen größten anzunehmenden Unfall in einem Kernkraftwerk? Eine Deutung solcher Zahlen wird zudem noch durch viele Störgrößen erschwert, einige davon sind tief verwurzelt: Gottesurteile, Weltbild, Emotion, große Risiken, übergroße Konsequenzen etc. lassen eine Rationalität im Umgang mit solchen Zahlen oft gar nicht aufkommen.

Der übliche Weg im Unterricht (auf allen Ebenen) ist der, dass man möglichst rasch zur Mathematik voranschreitet, in der Hoffnung, durch scharfe Begriffe die schwammigen Vorstellungen zu klären und „aufzulösen“. Die äußerlichen Erfolge im Lernen trügen aber: Im Ernstfall greifen Lerner häufig auf ihre rohen Strategien zurück oder interpretieren die Aufgaben bzw. ihre Ergebnisse um.

Lyso (2008) schlägt deshalb vor, zum Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung einfachste Items aus der empirischen Forschung zu verwenden und die Studierenden diese eigentätig (zuerst schriftlich) bearbeiten zu lassen. In Einzelinterviews und im offenen Klassengespräch kann man dann weiter darauf eingehen, wie und warum die Studierenden die Aufgaben so aufgefasst haben und inwieweit sie damit einschränkende Zusatzannahmen getroffen haben, die vielleicht fragwürdig sind, oder inwieweit sie die Aufgaben gelöst haben, oder eigentlich ein anderes Problem gelöst haben, als man beabsichtigt hat. Und warum das so ist.

Ein solcher Einstieg über Items aus der empirischen Forschung provoziert Gespräche über Vorstellungen, falsche Einschätzungen, oder über verschiedene Sichtweisen; oder verschiedene Fragestellungen, die nahe beieinander liegen. Aber auch über Einstellungen: Wenn man ein Problem rein auf der Ebene des Nachdenkens behandelt, so werden ganz andere Vorstellungen abgerufen als wenn man sich mit einer fälligen *Entscheidung* konfrontiert sieht. So etwa hilft die Wahrscheinlichkeit ½ nichts, wenn man sich für eine von 2 Möglichkeiten zu entscheiden hat. Später, im mathematischen Teil des Unterrichts, kann man sich dann auf die einleitenden Gespräche beziehen, um Ergebnisse zu relativieren oder Begriffe zurechtzustutzen.

In einem schriftlichen Fragebogen gibt die folgende Variante möglicherweise mehr Aufschluss: Neben der eigenen Lösung sollen die Probanden auch die mutmaßliche Lösung anderer (etwa Jüngerer) angeben. Manchmal verstecken Probanden ihre eigene Lösung dorthinein und antworten im offiziellen Teil, so wie sie erwarten, dass man erwartet, dass sie antworten. „How to answer if you must“ ist ein geflügeltes Wort, das den Wert jeder Befragung ernsthaft in Frage stellen kann. Eine solche Fluchtmöglichkeit bietet gute Ansätze zur Evaluierung der eigentlichen Antworten. Vor jeder Befragung ist eine Komplexitätsanalyse der verwendeten Items sehr hilfreich.

Eine solche Komplexitätsanalyse sollte in der empirischen Forschung vorweg, also vor dem Einsatz eines Items möglichst viele Rekonstruktionen und „Lösungen“ antizipieren und klären. Solches Wissen kann auch im Unterricht, egal auf welchem Niveau, nicht schaden. Es ermöglicht eine bessere Interpretation von Antworten und eine sinnvollere Auseinandersetzung mit einem Probanden, weil man schon weiß, worauf dieser abzielt. Oft ergeben sich interessante Erkenntnisse, etwa, dass die Formulierung geradezu Missverständnisse herausfordert, die aber nicht auf fehlendes Begriffsverständnis zurückzuführen sind. Oder, die Strategien, die eingesetzt werden, passen zwar im Item nicht, sind aber in anderen Zusammenhängen durchaus zielführend. Selbst einfachste Beispiele lassen Freiheitsgrade der Interpretation zu.

Ausgewählte Items aus dem Fragebogen

1. Sie werfen einen fairen Würfel.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie einen Sechser bekommen?

Komplexitätsanalyse:

Gleichwahrscheinlichkeit auf den Möglichkeiten wird vorausgesetzt und ist – physikalisch – auch gut zu argumentieren.

$$P\,(6) = \frac{günstige}{mögliche} = \frac{1}{6}$$

Viele geben eine kleinere Zahl an, weil sie sich an ihren Erfahrungen mit der Wartezeit orientieren. Tatsächlich kann man mitunter recht lange auf den ersten Sechser warten müssen:

☼ Die Wahrscheinlichkeit, mehr als 6 Runden warten zu müssen, beträgt 33,5%;

☼ mehr als 12 Runden zu warten, hat immer noch eine Wahrscheinlichkeit von 11,2%.

☼ Hinzu tritt das Phänomen der verzerrten Speicherung bzw. Erinnerung an Häufigkeiten von Ereignissen; es tritt besonders bei wichtigen Ereignissen auf – Ereignisse wie das Eintreten eines Sechsers, von denen anderes abhängt wie eben der Spieleintritt.

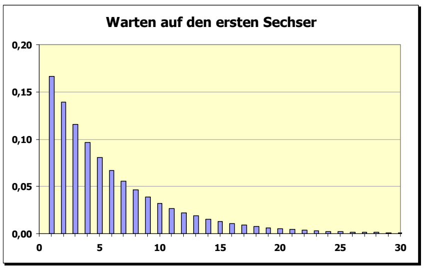

Abb. 3: Wartezeit auf den ersten Sechser.

2. Eine Frau erwartet ein Baby.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein Mädchen bekommt?

Komplexitätsanalyse:

Hier gibt es kein Symmetrie-Argument zur Stützung der Regel günstige durch mögliche. Die relativen Häufigkeiten – in beinahe allen Ethnien und Ländern – zeigen eine größere relative Häufigkeit von Knabengeburten als Mädchengeburten an. Die Werte bei uns liegen bei $P\,(Knabengeburt) = 0{,}514$.

Häufig wird jedoch die Aufgabenstellung mit $p = 1/2$ modelliert. Das liegt an einer reflexartigen Einschätzung – wo es zwei Möglichkeiten gibt, „haben“ diese Wahrscheinlichkeit 1/2. Dem liegt eine unreflektierte Anwendung der Symmetrie der beiden Möglichkeiten, welche zur Gleichwahrscheinlichkeit führt, zugrunde. Bei mehreren Möglichkeiten ist die Neigung, sie als gleich (symmetrisch) zu betrachten, viel geringer.

4. Sie nehmen an zwei Lotterien A und B teil. Wahrscheinlichkeit zu gewinnen,
.. in Lotterie A 0,05 (5%), in Lotterie B 0,10 (10%).
Wie groß ist Ihre Wahrscheinlichkeit,
a) in genau einer, b) in keiner der beiden, c) in beiden zu gewinnen?

	G_2	V_2	P
G_1	c) in beiden gewonnen	**a)** in genau	0,05
V_1	**a)** einer gewonnen	b) in beiden verloren	0,95
P	0,10	0,90	

Komplexitätsanalyse:

Die drei gefragten Wahrscheinlichkeiten ergänzen einander auf 1; sie stellen alle möglichen Fälle dar.

Um zu numerischen Werten zu gelangen, muss man noch eine weitere Eigenschaft voraussetzen, nämlich, die beiden Lotterien sind unabhängig. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeiten für Und-Ereignisse erhält man durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse.

	a)	b)	c)
Gewinnwahrscheinlichkeit	85,5%	14,0%	0,5%

Die Rechnungen sind aufwändig; die Annahme der Unabhängigkeit ist nicht selbstverständlich und wird oft angezweifelt.

Primitive Strategien: man kann Zahlen addieren oder multiplizieren – also
Antwort auf a) $0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}15$; Antwort auf c) $0{,}05 \cdot 0{,}10 = 0{,}005$.

Während c) sogar zahlenmäßig richtig ist, ist die Antwort auf a) damit falsch. Die Wertung eines Ergebnisses kann sinnvollerweise nicht ohne eine Würdigung des Arguments, welches dazu führt, erfolgen.

Die Struktur wird übersehen: die Antworten a) – c) schöpfen alle Fälle aus; es ist unmöglich, dass zwei zugleich eintreten können: ihre Wahrscheinlichkeiten müssen sich daher auf 1 ergänzen.

Eine intuitive Einschätzung – ohne Rechnung – der Gewinnwahrscheinlichkeiten greift oft weit daneben. Die Summe der Zahlen ist i. a. größer als 1 – supra-additiv.

5. Ein Paar “plant”, zwei Kinder zu haben. Nehmen wir an, die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt sei gleich jener einer Mädchengeburt.
… Wahrscheinlichkeit, dass das Paar zwei Mädchen bekommt?

Komplexitätsanalyse:

Für die Modellierung hat man zu berücksichtigen:

i) *Dieselbe* Wahrscheinlichkeit p für den Ausgang „Mädchen“ bei jeder Geburt.

ii) Die *Unabhängigkeit* zwischen den Geburten hinsichtlich des Geschlechts.

Dann erst kann man mit Binomialverteilung für die Anzahl der Mädchen bei 2 Geburten rechnen. Natürlich kann man diese Annahmen auch in ein zweistufiges Baumdiagramm verpacken, ohne die Binomialverteilung direkt anzusprechen. Hier wird – entgegen besseren Wissens – $p = \frac{1}{2}$ angenommen.

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}]{} M_1 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} M_2$$

Abb. 4

$\mathrm{P}\,(\textit{zwei Mädchen}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Schwierigkeiten der Aufgabenstellung:

☼ eine sehr persönliche Situation wird mit einem formalen Modell behandelt (dagegen kann man sich sträuben);

☼ im verwendeten Modell wird bewusst eine Vereinfachung mit $p = \frac{1}{2}$ vorgenommen, obwohl der Wert für Mädchen etwa bei $0{,}487$ liegt.

☼ Unabhängigkeit bezüglich des Geschlechts in der Geschwisterfolge ist fraglich: An älteren Daten mit Familien mit 5 und mehr Kindern erkennt man leichte Abhängigkeiten.

Löst man die Aufgabe durch eine (intuitive) Schätzung der Wahrscheinlichkeiten, so kommen verzerrende psychologische Faktoren hinzu, welche die Erinnerung von Häufigkeiten dominieren.

6. Zwei Mädchen und drei Knaben haben eine Party.
Sie einigen sich, zu losen, wer den Abwasch zu übernehmen hat. Wenn 2 ausgelost werden, … Wahrscheinlichkeit, dass … 2 Buben … den Abwasch zu erledigen …?

Komplexitätsanalyse:

i) Mit Baumdiagrammen

$$\xrightarrow[\frac{3}{5}]{} B_1 \xrightarrow[\frac{2}{4}]{} B_2$$

Abb. 5

$\mathrm{P}\,(\textit{zwei Buben}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$; dabei wählt man zuerst aus 5 Möglichkeiten bei 3 günstigen; hernach von den 4 verbleibenden Kindern; davon sind 2 Buben.

ii) Mit Kombinatorik

Für die „günstigen“: aus 3 Buben wählt man 2 aus; aus 2 Mädchen keines.

Für die „möglichen“: Man wählt aus den 5 Kindern 2 aus.

$$\mathrm{P}\,(\textit{zwei Buben}) = \frac{\textit{günstige}}{\textit{mögliche}} = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot 1}{\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}} = \frac{3}{10}$$

$\mathrm{P}\,(\textit{zwei Mädchen}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{10}$ (analog)

$\mathrm{P}\,(\textit{ein Mädchen, ein Bub}) = 1 - \frac{2}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$ (mit Summenkontrolle).

Man beachte, dass in den Familien mit 2 Kindern die Wahrscheinlichkeit für ein gemischtes Geschwisterpaar auch $\frac{1}{2}$ beträgt.

Übertragen von Ergebnissen aus ähnlichen Problemen: Der Kontext ist ähnlich zum Problem der Familien mit 2 Kindern (Item 5); obschon die Wahrscheinlichkeiten für

Mädchen oder Buben beim einzelnen Zug verschieden sind, stimmt die Lösung für die Wahrscheinlichkeit für „ein Mädchen und ein Bub“ überein. Solche Ergebnisse werden – so weiß man aus der empirischen Forschung – gerne unreflektiert übertragen. Man könnte daher aus falschen Gründen zum richtigen Ergebnis für „ein Mädchen und ein Bub“ kommen.

„Einstufige Strategie“: Hier wird auf eine erst jüngst benannte „Lösungsstrategie“ Bezug genommen (Lyso 2008): Tatsächlich argumentieren manche, als ob sie sich mit einem einstufigen Versuch konfrontiert sehen: Ein Bub hat Gewicht/Wahrscheinlichkeit 1/5 (gezogen zu werden und den Abwasch erledigen zu müssen). Ein anderer Bub hat auch Gewicht 1/5. Betrachtet man die beiden im selben Versuch, so sind die „Ereignisse“ unvereinbar; man hat daher die Gewichte zu addieren und kommt so zum Ergebnis 2/5, dass zwei Buben den Abwasch zu erledigen haben. Der zweistufige Versuch der Standard-Modellierung wird hier zu einem einstufigen umfunktioniert.

Natürlich ist wieder die intuitive Schätzung aus der Erinnerung – oder nach Wünschen – möglich.

7. Mario hat 3 rote, 2 grüne und 1 blaue Socke in seiner Schublade.
Er greift blind hinein … nimmt 2 Socken heraus.
Er meint, … Wahrscheinlichkeit, 2 rote Socken zu ziehen, 1/5 ...
Sein Freund Hans denkt aber, … 1/3 … Hat einer der beiden Recht?

Komplexitätsanalyse:

Auch hier hat man Baumdiagramme und Kombinatorik als Lösungsmethode zur Verfügung. Gewählt wird immer zufällig (mit Gleichwahrscheinlichkeit) aus den jeweiligen Möglichkeiten.

$$\xrightarrow[\frac{3}{6}]{} R_1 \xrightarrow[\frac{2}{5}]{} R_2$$

Abb. 6

$$\mathrm{P}\,(zwei\ rote\ Socken) = \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{1}{5};$$

Dabei wählt man zuerst aus 6 Möglichkeiten bei 3 günstigen; hernach von den 5 verbleibenden Socken, davon sind 2 rot. Mario hat daher Recht.

Hans könnte eventuell die Socken in 3 Paare aufteilen, wovon eines rein rot ist. Mit einer Gleichverteilungsannahme käme er auf ein rotes Paar mit 1/3.

Mit der einstufigen Strategie erhält man Gewicht 1/6 für jede Socke; für 2 rote erhält man danach ebenfalls 1/3

8. Ein Münzwurf kann auf Kopf K oder auf Zahl Z landen.
Welche der beiden folgenden Ergebnisfolgen ist wahrscheinlicher
(a) KZZKZK (b) KKKKZK (c) beide sind etwa gleich wahrscheinlich

Komplexitätsanalyse:

Münzwerfen ist eine Bernoulli-Versuchsreihe; mit derselben Wahrscheinlichkeit p für jeden Versuch; die einzelnen Versuche sind dabei unabhängig voneinander. Für die Münzen hat man eine „starke“ Hypothese – eine gewichtige Vormeinung – für $p = 1/2$. Danach haben beide Serien, in genau der Reihenfolge, wie sie genannt werden, dieselbe Wahrscheinlichkeit:

$\mathrm{P}\,(\mathrm{KZZKZK}) = \mathrm{P}\,(\mathrm{KKKKZK}) = (\tfrac{1}{2})^6 = 0{,}0156$, Antwort (c) ist also richtig.

Ein erster Ansatz kann auch darin bestehen, dass die Probanden eine Auswahl zwischen **zwei** Möglichkeiten sehen – (a) oder (b) – und daher (c) ankreuzen. Sie könnten aber gleichermaßen durch diese Überlegung verwirrt sein, weil sie intuitiv spüren, dass die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nicht zutrifft, weil ja beide Möglichkeiten jeweils eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit von $0{,}0156$ haben.

Die Folge in (a) erscheint viel „zufälliger" als die Folge in (b):

☼ Die relative Häufigkeit von K ist $\frac{1}{2}$ in (a) bzw. $\frac{5}{6}$ in (b);

☼ Das Bild ist viel bunter in (a) und spiegelt damit wesentliche Eigenschaften von Zufall viel besser wider als die Folge in (b).

Eine häufige Strategie zur Schätzung von unbekannten Wahrscheinlichkeiten:

☼ Einzelne Elemente zu Gruppen mit ähnlichen Eigenschaften zusammen legen: Statt des Elements (die genaue Serie) KZZKZK wird die Gruppe der Serien mit „3 Köpfen und 3 Zahlen" betrachtet. Gleicherweise wird die Serie KKKKZK umgedeutet zur Gruppe ähnlicher Ergebnisse, das sind dann alle mit „genau einem Kopf".

☼ Dann wird die Wahrscheinlichkeit der Gruppe geschätzt: Von der Gruppe zu (a) ähnlichen gibt es $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$, von der Gruppe zu (b) ähnlichen Serien gibt es hingegen nur $\binom{6}{5} = 6$. Dies kann man aus der eigenen Erfahrung schätzen oder kombinatorisch berechnen.

☼ Schließlich wird die Wahrscheinlichkeit der Gruppe auf das einzelne Element übertragen: Das hat zur Folge, dass Serie (a) von vielen als wahrscheinlicher angesehen wird.

Es mag viele Anwendungen geben, in denen die einzelnen Folgen keinerlei Bedeutung haben, weshalb die Gruppenbildung Sinn macht. Deshalb kann die angedeutete Strategie im Alltag durchaus erfolgreich sein.

Aber in der Aufgabenstellung sind ausdrücklich die einzelnen, genauen Abfolgen, der Münzwürfe gemeint. In Glücksspielen etwa sind in der Tat die genauen Abfolgen, oder wenigstens die speziellen Zahlen an sich, ausschlaggebend. Etwa im Lotto: Es kommt zwar nicht auf die zeitliche Ziehung der Gewinnzahlen an. Es ist aber wichtig, welche Zahlen im Einzelnen gezogen wurden. Ähnliche Folgen reichen nicht zum Gewinn.

9. Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt liegt etwa bei ½. Welche der beiden folgenden Geschwisterfolgen ist bei sechs Kindern eher zu erwarten?
(a) KMMKMK (b) KKKKMK (c) beide Geschwisterfolgen etwa gleich wahrscheinlich

Komplexitätsanalyse:

Wie in Aufgabe 8 hat man eine Bernoulli-Versuchsreihe vorauszusetzen, d. h. gleiche Wahrscheinlichkeit p für das Geschlecht aller Kinder & Unabhängigkeit. Hier wird – trotz besserer Kenntnis $p = 0{,}5$ vorausgesetzt.

$\mathrm{P}\,(\mathrm{KMMKMK}) = \mathrm{P}\,(\mathrm{KKKKMK}) = (\tfrac{1}{2})^6 = 0{,}0156$. Demnach ist Antwort (c) richtig.

Die Bemerkungen zu Aufgabe 8 gelten sinngemäß. Kommt noch hinzu, dass der Kontext viel eher die Gruppenbildung veranlasst, sodass sich vielen Probanden die Frage stellt, ob Familien mit bunter Zusammensetzung der Geschwisterfolge häufiger sind als Familien mit fast nur Knaben. Die Aufgabenstellung jedoch verlangt, auf die genaue Reihenfolge einzugehen. Das stellt hiermit eher eine künstliche Frage dar.

10. In einer Urne sind zwei weiße und zwei schwarze Kugeln.
Es wird 2× … hintereinander gezogen, ... nicht zurückgelegt.
(a) Man sieht nur die erste Kugel, diese ist weiß.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite auch weiß ist?

Komplexitätsanalyse:

Wir ziehen zufällig, immer mit derselben Wahrscheinlichkeit für alle vorhandenen Kugeln in der Urne; da wir nicht zurücklegen, sind in der Urne beim 2. Zug von drei vorhandenen Kugeln zwei schwarz und nur eine weiß, daher gilt:

$$\mathrm{P}\,(W_2 \mid W_1) = \frac{1}{3}$$

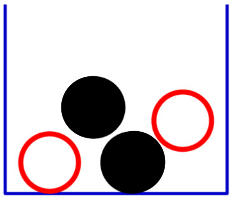

Abb. 7. : Falk-Urne mit 2 weißen und 2 schwarzen Kugeln.

(b) Man sieht nur die zweite Kugel, diese ist weiß.

Komplexitätsanalyse:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene auch weiß ist?

$$\mathrm{P}\,(W_1 \mid W_2) = \frac{\mathrm{P}\,(W_1 \wedge W_2)}{\mathrm{P}\,(W_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

x_1	$\mathrm{P}\,(x_1)$	$\mathrm{P}\,(W_2 \mid x_1)$	$\mathrm{P}\,(W_2 \wedge x_1)$	$\mathrm{P}\,(W_2)$
W_1	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$
S_1	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$	
			Zähler	Nenner

Kausaldenker argumentieren: durch *spätere* Ereignisse ist keine Veränderung der Wahrscheinlichkeit von *früheren* Ereignissen möglich, weshalb „gilt“:

$$\mathrm{P}\,(W_1 \mid W_2) = \mathrm{P}\,(W_1) = \frac{1}{2}.$$

Solchen Argumenten muss man direkt begegnen; die mathematische Lösung wird sonst abgelehnt.

Einige Lehren aus den Beispielen

Die hier besprochenen Items entstammen zum Teil der Bearbeitung eines Fragebogens des Autors, der auch in Borovcnik & Bentz (1990, 2003) enthalten ist. Nach schriftlicher Bearbeitung wurden einige Studierende auch in einem manipulativen Interview befragt. Die Komplexitätsanalysen gehen auf noch frühere Arbeiten des Autors zurück (siehe Borovcnik & Bentz 1991) und wurden durch die Ergebnisse entsprechend verfeinert. Die Aufgaben sind allesamt einfach; bis auf Item 10 sind sie auch einander ähnlich. Aber eben nicht ganz gleich. Ihr Wert liegt in ihrem Potential aufzuzeigen, dass selbst feinste Differenzen zu ganz unterschiedlichen Auffassungen auf Seiten der Lernenden führen können. Solche Beispiele übergeht man im Unterricht rasch, weil sie nicht viel herzugeben scheinen, außer, dass eine Zahl, genannt Wahrscheinlichkeit, berechnet wird. Die Aufgaben haben aber weit mehr Gehalt als diese Zahl zu berechnen; dazu sind sie wirklich zu trivial. Sie sollen illustrieren, dass private Vorstellungen ganz andere Wege einschlagen als die durch die Wahrscheinlichkeitstheorie vorgegebenen. In der Aufarbeitung dieser Diskrepanz liegt ihr didaktisches Potential. Intuitive Vorstellungen werden also nicht beiseite geschoben, sondern verfeinert und damit hoffentlich nachhaltig beeinflusst; ihre Einschränkungen aber auch ihre Vorzüge werden offen gelegt.

Wahrscheinlichkeitsbewertungen werden auch über Wartezeiterfahrungen zugeordnet. Dieses Verfahren ergibt i. a. sehr stark verzerrte persönliche Werte, die von den normativen Lösungen weit abweichen. Beim Würfeln und der Einschätzung eines Sechsers hatten wir das thematisiert (Item 1). Es hilft aber nichts, die Wahrscheinlichkeiten im normativen Kontext hinzustellen und zu begründen; der persönliche Ansatz wird dadurch gar nicht tangiert; im positiven Fall erreicht man eine Änderung des Verhaltens nur im "offiziellen" Gebrauch. Kausale Assoziationen wie in Item 10 sind hartnäckig und schwer zu behandeln. Offensichtlich gehen der normative Ansatz und die kausale Denkweise völlig aneinander vorbei. Hier kann man mit gezielten Variationen des Kontexts eine Einsicht beim Lernenden zu erreichen versuchen.

Item 8 und das fast wortgleiche Item 9 wurden genau in dieser Formulierung von Kahneman & Tversky in ihren bahnbrechenden Untersuchungen über heuristische Strategien (siehe Kapadia & Borovcnik 1991) verwendet. Ihre Formulierung mag umständlich sein; sie weisen jedoch auf interessante Strategien zur Bearbeitung solcher Beispiele hin. Für die Erforschung von intuitiven Vorstellungen sind gekünstelte Fragen wie in Item 8 und 9 von beschränktem Wert, weil man die falschen Antworten nicht direkt auf ein fehlendes Verständnis zurückführen kann; die Probanden werden sozusagen mit einer artifiziellen Frage überrascht und antworten i. a. auf das für sie viel relevantere Problem, das sich (in diesem Items) auf die Gruppen ähnlicher Serien bezieht.

Im Unterricht können gekünstelte Fragen durchaus ihren didaktischen Wert bekommen, wenn man ihren Charakter geeignet behandelt. Man kann damit den Sinn von Gruppenbildung zur Wahrscheinlichkeitsbewertung klar stellen und thematisieren, dass eine Übertragung von Wahrscheinlichkeiten einer Gruppe auf die einzelnen Elemente nicht möglich ist. Das ist auch bei der korrekten Deutung von Konfidenzintervallen wichtig: Während für die Gruppe – die Methode der Erzeugung aller Konfidenzintervalle – eine Überdeckungswahrscheinlichkeit zutrifft, ist es nicht möglich, diese so genannte Sicherheit auf ein einzelnes Intervall zu beziehen. Die weit verbreitete Interpretation als „der Parameter μ liegt mit Wahrscheinlichkeit von 0,95 im (aus den konkreten Daten berechneten) Intervall von, sagen wir, [172, 184]“ mag wohl zur relativen Beliebtheit von Konfidenzintervallen im Vergleich zu statistischen Tests beitragen, ist aber falsch.

In der empirischen Forschung denkt man eher an ein neutrales Interview; der Interviewer sollte sich zurückhalten, damit man die Intuition der Probanden authentisch erhellen kann. Schon in der empirischen Forschung mag das daneben gehen, weil man so nichts über die Stabilität der Vorstellungen erfahren kann. Es mag doch interessant sein, unter welchen Variationen der Aufgabenstellung der Proband bei seiner geäußerten Auffassung bleibt. Oder, welcher „Provokationen“ es bedarf, dass der Proband seine Sicht ändert, etwa, dass er einsieht, dass seine Rekonstruktion der Situation, sein Lösungsansatz oder die verwendete Methode etc. nicht zum Ziel führen.

Für den Unterricht hat ein manipulatives Interview interessante Aspekte. Man kann mit der Betroffenheit der Probanden (einzeln oder im Klassengespräch) spielen. Man kann die Probanden durch das Angebot einer Wette direkt involvieren, was ihre Haltung und die verwendeten Methoden drastisch ändern kann. Man kann die Probanden mit Variationen der Problemstellung konfrontieren, bis sie einsehen, dass und warum ihr Ansatz nicht standhält.

3. Szenario-Charakter von Wahrscheinlichkeit

Was die verwendeten stochastischen Modelle noch schwieriger im Verständnis macht, ist ihre oft schwer zu beurteilende Beziehung zur realen Situation, welche sie beschreiben sollen. Ja, stochastische Modelle haben mitunter mehr den Charakter von Szenarien, welche auf der Basis der Frage „was wäre, wenn …“ die reale Situation nachstellen, ohne sie zum Teil besonders gut abzubilden. Dass man aus solchen Szenarien dennoch transparente Entscheidungshilfen gewinnen kann, mag paradox erscheinen (s. auch Borovcnik 2006).

Einige Eigenschaften von Szenarien, die sie von Modellen abheben

Es muss gesagt werden, dass der Begriff von Szenarien ganz unterschiedlich gehandhabt wird und wohl auch in absehbarer Zukunft keine einheitliche Sicht dazu entwickelt werden wird. Wir verwenden „Szenario“, oder besser „Szenarien“, als Vehikel, um eine bestimmte Sicht von Anwendungen zu transportieren, die der Stochastik eigen ist, welche aber anderen Bereichen der Angewandten Mathematik nicht oder zumindest nicht im selben substantiellen Ausmaß zukommt. Am besten orientiert man sich beim Lesen an den im Folgenden besprochenen Beispielen; im Kontext von Aufgaben ist es viel leichter, den Szenarien-Charakter von Anwendungen zu beleben und belegen.

Szenarien sind Modelle, die man ganz einfach durchspielt, ohne Rücksicht zunächst darauf, ob sie gut auf die Realität passen oder nicht. Auf der Basis „was wäre, wenn …?“, in Form eines Gedankenexperiments, untersucht man Folgeerscheinungen. Man spielt etwa einfach durch, was ein 1-, 3-, oder 5-prozentiges Wachstum einer Bevölkerung zur Folge hat, etwa wann sich die Bevölkerung verdoppelt. Ohne auf die demographische Zusammensetzung der Bevölkerung (jung – alt, Geschlecht, soziale Schicht, Fruchtbarkeit etc.) einzugehen. Und, man kann durchaus Erkenntnisse daraus ziehen. Geht man in Richtung Modelle, so hat man die „Abbildung“ der Realität zu verfeinern. Es muss ferner eine Möglichkeit geben, die Güte der Anpassung eines Modells zu beurteilen.

Sind Szenarien Modelle, die nicht allein, sondern immer in Alternativen auftreten? Das kann man so nicht sagen, denn auch zu Modellen gibt es Alternativen; man testet sogar verschiedene Modelle gegeneinander. Die Absicht bei Modellen ist aber, das bessere zu finden. Bei Szenarien sollte man eher an den Vergleich mehrerer denken und was man aus den unterschiedlichen Ergebnissen für die Realität an Einsichten gewinnen kann.

Sind Szenarien Modelle, von denen man weiß, dass sie nicht stimmen (nicht genau genug passen)? Der Unterschied zwischen Modellen und Szenarien besteht mehr in der Intention. Man rechnet einfach mehrere Szenarien durch und vergleicht die Ergebnisse miteinander. Aus den Unterschieden versucht man dann etwa kritische Parameter eines Problems zu eruieren.

Sind – im Gegensatz dazu – Modelle solche, wo dem Anwender nicht bewusst ist, dass sie nicht stimmen? Nein. Modell schließt immer die Absicht mit ein, etwas gut an die Wirklichkeit anpassen zu wollen; mit der Option, diese Anpassung auch zu verfeinern und verbessern. Die wesentlichen Grundzüge einer Situation sollte man in einem Modell angemessen darstellen. Klar ist, dass ein jedes Modell nur eine Annäherung an die Wirklichkeit bleibt. Wenn ein Modell gut passt, so sollte es kein Wunder sein, dass man mit den Ergebnissen auch etwas anfangen kann. Es muss aber Kriterien geben, nach denen man die Diskrepanz zwischen Modell und Wirklichkeit misst. Szenario ist dagegen einfach ein Durchspielen eines Modells, ohne die Absicht, es besonders gut an die Wirklichkeit anpassen zu wollen oder zu können. Das entscheidende in Szenarios ist nicht das eine Ergebnis, sondern die Abhängigkeit von Ergebnisparametern von bewusst variierten Eingangsparametern. Ein weiterer Aspekt ist, verschiedene Szenarios miteinander zu vergleichen.

Bei Modellen verwendet man auch real nicht abgesicherte Hypothesen und zieht daraus Schlüsse. Da besteht kein Unterschied zu Szenarien, zumal wir wissen, dass beide nicht unbedingt auf die Realität passen müssen. Worin unterscheiden sich dann Modelle und Szenarien? Zunächst kann man in beiden Fällen die Realität nur bedingt darstellen. Wenn man Szenarien aber auffasst als etwas, das die Realität nur bedingt abbildet (jedenfalls ist dies nicht der Hauptgedanke bei Szenarien), dann klingt es schon paradox, dass man daraus dennoch etwas für die Realität an Entscheidungshilfe abgewinnen kann. Modelle sollten genau aus diesem Grund möglichst gut (angesichts zeitlicher, finanzieller und konzeptueller Beschränkungen angemessen gut) an die Realität passen. Bei Szenarien steht das reine Gedankenexperiment im Vordergrund.

Beurteilung von Risiken

Nicht nur technische Systeme haben eine Zuverlässigkeit = Wahrscheinlichkeit des Überlebens für einen bestimmten Zeitraum. Man kann die Wahrscheinlichkeit zu überleben für das ganze System berechnen, wenn man geeignete Annahmen für die einzelnen Bauteile trifft. Die folgende Aufgabe stammt aus ingenieurmäßigen Anwendungen: Ein System hat 3 Bauteile, jedes mit einer Zuverlässigkeit von 0,95 – etwa für eine Mission zur Erforschung des Titans. Das System funktioniert, wenn B_1 und B_2 klaglos arbeiten oder wenn B_3 funktioniert. Wie hoch ist die Zuverlässigkeit des ganzen Systems?

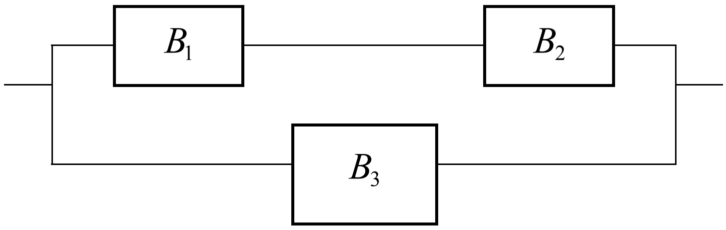

Abb. 8: Schaltbild des Systems im Sinne seiner Zuverlässigkeit.

Ist es besser, wenn man zwei ganze Systeme auf die Mission zum Titan mitnimmt, oder wenn man jede der Komponenten separat verdoppelt? Wie viele vollständige Systeme, oder wie viele Stand-by-Komponenten soll man einbauen, wenn die Zuverlässigkeit des entstehenden Systems eine Zuverlässigkeit von mindestens 0,99999 aufweisen soll? Was soll diese Zahl denn überhaupt bedeuten?

Die Standardlösung behandelt die Bauteile,

- als ob sie unabhängig wären;
- als ob sie alle dieselbe Zuverlässigkeit von z. B. 0,95 hätten.

Was bedeuten nun diese 0,95. Heißt das, dass 95% der Bauteile ihren Zweck erfüllen? In welchem Versuch? Oder ist das eine ingenieurmäßige Beurteilung der Zuverlässigkeit, also ein qualitatives Expertenurteil? Natürlich sind die Bauteile

- abhängig;
- sie haben verschiedene Zuverlässigkeiten.

Dennoch, das Szenario ist die einzige Möglichkeit, mit dem Problem umzugehen, bevor das Raumschiff auf seine Reise zum Titan geschickt wird. Daraus erhält man Anhaltspunkte darüber,

- wie die Zuverlässigkeit des endgültigen Systems zu bewerten ist;
- welche Möglichkeiten bestehen, diese zu erhöhen;
- ob sich die Kosten rentieren, bestimmte Redundanzen einzubauen.

Ein Restrisiko eines Ausfalls wird immer bestehen bleiben. Das Szenario erlaubt aber, relative Risiken und die damit verbundenen Kosten miteinander zu vergleichen. Damit erhält man konkrete Hinweise, welche Entscheidungen man zu treffen hat.

Das Szenario berechnet keinerlei absolute Risiken. Szenarien sind anders als Modelle:

- Sie erlauben, verschiedene Möglichkeiten zu bewerten,
- auch wenn sie die Wirklichkeit nicht möglichst genau abbilden können oder wollen.

Wahrscheinlichkeiten sind viel eher für Szenarien als für Modelle geeignet.

Bestimmung von Preisen bei Unsicherheit

Erwartete Werte bilden die Grundlage für die Bestimmung von Preisen, wenn Ergebnisse durch Zufall schwanken. Eine Möglichkeit, zufällige Ereignisse zu gewichten, ist die Extrapolation von relativen Häufigkeiten aus Information über die Vergangenheit. Für eine Kaskoversicherung nehmen wir ein ganz einfaches Modell. Es sei nur ein Totalschaden berücksichtigt (2% aus der Vergangenheit) sowie kein Schaden.

Kosten [in €]		Entscheidung	
		A_1 = Versicherung ja	A_2 = nein
Potentielle Zukunft	T_1 = Kein Unfall	1 000	0
	T_2 = Totalschaden	1 000	20 000

Aus der Sicht der Versicherung

Bei 10 000 Polizzen kann die Versicherung so rechnen: 200 Totalschäden mit Kosten von je 20 000 ergibt Zahlungen von 4 000 000, i. e. 400 € pro Polizze. plus Aufwandsentschädigung & Profit macht 1 000 € pro Polizze.

Man kann berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein einzelnes Versicherungsjahr dennoch ein Minus ergibt. Dieses Restrisiko kann die Versicherung geringer halten, indem sie die Prämie höher ansetzt. Wie steht es aber mit der Balance, das Restrisiko zu verringern und dem Preis der Polizze? Ist der nämlich zu hoch, wird keiner die Polizze kaufen. Die Versicherung kann auch die Zahl der Verträge zu erhöhen versuchen. Für die Versicherung ist es ein *Modell*, das sie sogar noch verbessern kann, indem sie die Schadenskategorien feiner aufschlüsselt, Risikogruppen von Fahrern zu identifizieren sucht etc.

Für die Versicherungsgesellschaft ergibt sich aus einer fein abgestuften Schadensstatistik der Risikoanteil an der Prämienzahlung. Hinzu kommt nach Vorgenanntem auch eine Gewinnmarge. Bei bekannter Zahl von Versicherten (einer homogenen Risikogruppe) einer Polizze bestimmten Typs kann man die Wahrscheinlichkeit, dass die Schadenssumme insgesamt (oder pro Polizze) einen bestimmten Betrag nicht übersteigt, mit 1% (oder welcher Zahl auch immer) angeben. Das betrifft natürlich ein normales Geschäftsjahr. Für Kasko-Versicherungen mag es nicht so leicht sein, sich vorzustellen, was Außerordentliches passieren muss, damit ein *nicht* normales Geschäftsjahr vorliegt. Ohne in Details zu gehen kann man sagen, „2008/09 war am Finanzmarkt kein normales Geschäftsjahr"; die Ereignisse waren aus den vorhergehenden Statistiken nicht erkennbar. Höchstens Insider konnten sich darauf vorbereiten. Solche Risiken entziehen sich i. a. einer statistischen Betrachtungsweise. (Obwohl man festhalten sollte, dass so genannte Bayesianer auch dafür Methoden parat hätten; allerdings sind diese Methoden ohne Insiderwissen wohl kaum zielführend einzusetzen.)

Für normale Geschäftsjahre ist die Risikobeurteilung damit gelöst. Falls die Ergebnisse stärker streuen, gibt es für den Fall vieler Schadensfälle noch das System der Rückversicherung, innerhalb dessen kleinere Gesellschaften auch dieses Risiko bei größeren Rückversicherern abdecken können.

Aus der Sicht des Autobesitzers

Für die Versicherung ist es also ein Geschäft. Das Risiko, einen Verlust zu bauen, ist sehr klein und kalkulierbar. Normalerweise macht man Gewinne.

Wieso sollte dann ein Autobesitzer eine Kaskoversicherung abschließen?

Kann es auch für ihn ein Geschäft sein? Gibt es so etwas wie ein „win-win"-Situation? Wenn er in Geld denkt, nein. Dann kann die gute Lösung für die Gesellschaft nicht gut für ihn sein. Wenn er sein Fahrverhalten und sein persönliches Risiko anders einschätzt als es der Gesamtheit zukommt, kommen wir einer Lösung näher. Dann aber muss der Autobesitzer:

- seinen (negativen) Nutzen aus den möglichen Schäden bewerten und
- seine subjektiven Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Schäden bewerten.

Jetzt wird das anfängliche Modell, das immerhin ausbaufähig war, endgültig zu Szenarien. Die Sicht der Versicherung und die des Autobesitzers passen nicht in dasselbe Modell. Der Autobesitzer kann für sich in keiner Weise ein ähnliches Modell wie die Versicherung aufbauen und mit ähnlichen Daten füllen (relative Häufigkeiten für verschiedene Schäden etwa). Er muss auf Szenarien ausweichen und über seine Gefährdung und über seinen (negativen) Nutzen nachdenken.

Transparenz von Entscheidungen durch Durchspielen von Szenarien

Die folgenden Überlegungen beziehen sich nur auf Geld und noch nicht auf Nutzen. Im Moment geht es um die subjektive *Gewichtung* der Schadensfälle.

- Risikoscheues Verhalten: Minimiert man die Maximalkosten, so führt das zu Entscheidung „Versicherung ja".
- Gewichtet man T_1 und T_2, z. B. mit relativen Gewichten von 39 : 1 (i. e., Totalschaden hat eine Wahrscheinlichkeit von 1/40), dann rechnet man folgende Kosten: Für A_1 bleibt es bei 1000; für A_2 ergibt sich: $\frac{39}{40}\cdot 0+\frac{1}{40}\cdot 20000=500$. Jetzt ist es besser, keine Versicherung abzuschließen. Allerdings: Die Entscheidung hängt von den Gewichten ab. Andere Gewichte mögen zu anderen Entscheidungen führen. Wie gut kann man diese Gewichte einschätzen?

Szenarien erlauben Rückschlüsse, auch wenn sie nicht passen

- Eine Möglichkeit, sich dieser Mühe und Unwägbarkeit zu entledigen besteht in der Untersuchung der Frage, bei welchen Gewichten denn die Entscheidung kippt. Einen solchen Punkt nennt man „Break-even-point": Schätzt man das Gewicht für einen Totalschaden (gegen keinen Unfall) mit 1 : 15, so erhält man für den Wert der Aktion „keine Versicherung abschließen" $\frac{15}{16}\cdot 0+\frac{1}{16}\cdot 20000=1250$; der Preis ist höher als der Preis der Polizze. Schätzt man dagegen das Gewicht für einen Totalschaden mit 1 : 24, so erhält man $\frac{23}{25}\cdot 0+\frac{1}{25}\cdot 20000=800$, was "billiger" ist als die Polizze. Irgendwo zwischen diesen Gewichten kippt die Entscheidung; genauer, sie kippt bei Gewicht 1 : 19 für den Totalschaden. Hat man diesen „Break-even"-Punkt berechnet, so muss man seine persönlichen Gewichte für den Totalschaden nicht mehr exakt bestimmen. Man braucht nur sein Risiko damit zu vergleichen; man kann die schwierige Aufgabe der genaueren Schätzung seiner eigenen Risiken so umgehen und dennoch eine vernünftige Entscheidung treffen.

4. Beispiele zu Verteilungen und Umgehen mit Voraussetzungen

Den Abschluss der Ausführungen bilden einige Beispiele zu den üblichen Verteilungen, in denen man durch Variation der Eingangsbedingungen sinnvolle Einsichten über die reale Situation gewinnen kann. Gleichzeitig wird mit den Aufgaben ein breiteres Bild von Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vermittelt.

Revidieren von Wahrscheinlichkeiten unter neuer Information mit der Bayes-Formel

Man teilt Mails in Ham und Spam ein. Dann schaut man die Wörter durch, die in den Ham-Mails und in den Spam-Mails vorkommen. Man weiß z. B., dass in 30% aller Spam-Mails das Wort „free“ vorkommt und (vielleicht) in 1% aller Ham-Mails.

a) Wenn eine Mail ankommt, die das Wort „free“ enthält, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie Spam? Unterstellen Sie dabei eine globale Spamhäufigkeit von 10% (bzw. 30%).
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mail, die durch diesen einfachen Spamfilter durchkommt, doch Spam ist?
c) Schlagen Sie Verbesserungen dieses einfachen Spamfilters vor.

Die Lösung hängt natürlich von den a priori-Wahrscheinlichkeiten, Spam zu erhalten, ab. Falls das Wort „free“ enthalten ist, erhält man für die Wahrscheinlichkeit von Spam 0,7692 (bei 10% Spam a priori) bzw. 0,9278 (bei 30% Spam). Überdies ist die Trennkraft des Filters sehr gering, denn, falls „free“ nicht enthalten ist, so bleibt immerhin eine Wahrscheinlichkeit für „Spam“ von 0,0728 bzw. 0,2326. Das macht deutlich, dass ein solcher Filter nicht tauglich ist, Spam von ordentlicher elektronischer Post zu unterscheiden. Außerdem sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten sehr von der Einzelperson abhängig, für die man einen Spamfilter einbauen möchte.

Obwohl das Beispiel in der gegenwärtigen Form sehr unrealistisch klingt und auch keine wirkliche Lösung für einen Spamfilter darstellt, zeigt es deutlich, wie man einen Spamfilter trainieren kann, damit er sich nach Aufnahme mehrerer Schlüsselworte zu einer zuverlässigen Hilfe entwickelt, um Spam von normalen Mails zu trennen. Für einfachere Repräsentationen der Bayes-Formel, die vielleicht nicht das Verständnis, wohl aber die Wahrscheinlichkeit einer korrekten Lösung und auch die Akzeptanz derselben erhöhen, siehe Wassner et al (2002) oder Gigerenzer (2002).

Binomialverteilung

Blutspenden sind vor ihrer Aufbereitung zu einer Blutkonserve auf ihre Eignung zu untersuchen. Die Kosten für eine Untersuchung belaufen sich – unabhängig von der Blutmenge – auf 20 €. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ist eine Blutspende für die Aufbereitung geeignet. Anstatt nun jede Blutspende einzeln zu prüfen, sollen drei verträgliche Spenden zuerst in einen Pool zusammen geführt und erst dann untersucht werden. Wird bei der Poolbildung eine vorher geeignete Spende verunreinigt, so entsteht ein Schaden von 50 Euro pro vorher geeigneter Spende. Ist die Vorgangsweise der Poolbildung unter wirtschaftlichen Aspekten sinnvoll?

Auch hier sind die Voraussetzungen durchaus hinterfragenswert. Handelt es sich bei den Blutproben wirklich um eine Bernoulli-Kette (unabhängig mit derselben Wahrscheinlichkeit verunreinigt). Man kann hier an einigen Voraussetzungen drehen, um kritische Größen herauszubekommen:

a) Wie viele Blutproben sollen zu einem Pool vereint und gemeinsam geprüft werden?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass einzelne Proben verunreinigt sind?
c) Wie stehen die Kosten durch Zerstörung und durch getrenntes Prüfen relativ zueinander?

Bei gegebenen Daten ist Poolbildung wirtschaftlicher, man hat einen erwarteten Gewinn von 14,35 € pro drei zu einem Pool zusammen gefassten Blutproben. In einer Tabellenkalkulation kann man durch Schieberegler für den Anteil verunreinigter Proben und die Zahl der Proben, die zu einem Pool vereint und gemeinsam geprüft werden sollen, schnell herausbekommen, dass mit höherem Verunreinigungsgrad Poolbildung keinen Sinn mehr macht, oder dass bei geringerem Verunreinigungsgrad sogar stärkere Poolbildung von Vorteil ist. Auch hier sieht man die Sensitivität des Ergebnisses von Eingangsparametern und Voraussetzungen der verwendeten Verteilung. Eine Behandlung der Aufgabe wird mehr zu einer Orientierungshilfe für die zu treffende Entscheidung als zu *der* Lösung des Problems.

Poisson- und Exponentialverteilung

Sei Y eine Exp (0,5)-verteilte Zufallsvariable, welche die Länge eines Telefongesprächs beschreibt. Die Kosten eines Telefongesprächs der Länge y sind gegeben durch:

$$k(y) = \begin{cases} 10 & y \le 5 \\ 2y & y > 5 \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die erwarteten Kosten eines Telefongesprächs.
b) Berechnen Sie die Varianz der Kosten eines Telefongesprächs.
c) Geben Sie ein Intervall für die Kosten an, welches die vorgegebene Wahrscheinlichkeit von 99% einhält.

Die Zahl der Gespräche ist Poisson-verteilt mit dem Parameter μ=100. Bestimmen Sie

d) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl der Gespräche 130 nicht übersteigt;
e) eine vernünftige obere Schranke für die Höhe der Kosten einschließlich einer Risikozahl, diese Kosten zu überschreiten – wie müssten Sie vorgehen, wenn Sie diese Schranke genauer bestimmen wollten?

Hier mag das Modell für die Kosten der Einzelgespräche und die Anzahl der Gespräche gar nicht so abwegig sein. Allerdings ergeben sich sofort Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Lösung, weil die einzelnen Konzepte auch auf Universitätsniveau – wenigstens in mathematischen Vorlesungen für Anwender (etwa für Informatik-Studierende)– nicht so leicht bewältigbar sind. Dabei helfen natürlich die Exploration der Verteilungen numerisch sowie die Simulation der Bedingungen (etwa mit einer Tabellenkalkulation, siehe Anhang).

Normalverteilung

Die Lebensdauer von Glühlampen sei normal verteilt mit μ=900 und σ=200 [h].

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lampe nach spätestens 1300 Betriebsstunden ausfällt?
b) Zu welchem Zeitpunkt sind zwei Drittel der Lampen ausgefallen?
c) Angenommen, wir könnten zu jeder Lampe eine zweite dazu schalten, falls die erste ausgefallen ist. Dann hat auch die Lebensdauer eines solchen Tandems eine Normalvertei-

lung. Wie sehen ihre Parameter aus, wenn man die Lebensdauern beider Lampen als stochastisch unabhängig modelliert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tandem nach spätestens 2600 Betriebsstunden ausgefallen ist? Zu welchem Zeitpunkt sind zwei Drittel der Tandems ausgefallen?

d) Angenommen, alle Lampen müssen ausgetauscht werden, wenn zwei Drittel ausgefallen sind (die Lampen sind in einem Tunnel angebracht, der dann nicht mehr ausreichend ausgeleuchtet ist). Ist es wirtschaftlicher, Einzellampen oder Tandems anzubringen?

Ein Tandem kostet 2,5 €, eine Lampe 1 €; es gibt 2000 Lampen. Das Auswechseln aller Lampen (bzw. Tandems) kostet 1000 €.

Natürlich ist die Lebensdauer der Lampen nicht normalverteilt. Auch die Schätzung der Parameter mag mit Unsicherheiten behaftet sein. Das Modell (als Modell, welches eine ziemlich gute Beschreibung der „wahren“ Verhältnisse in der Realität liefern soll) passt also schlecht. Als Szenario aufgefasst (als Durchspielen einer künstlichen Situation) liefert es aber vielleicht doch Anhaltspunkte und Entscheidungshilfen, ob man Einzellampen oder Tandem-Lampen installieren soll. Jedenfalls liefert das ursprünglich lediglich als matte Illustration für das Ausrechnen von Wahrscheinlichkeiten nach dem Normalverteilungsmodell gedachte Beispiel im neuen Kontext mit einer klaren *Zielsetzung* einen Beitrag für die fingierte anstehende Entscheidung. Die dabei verwendeten Wahrscheinlichkeiten entbehren klarerweise einer Ein-zu-Eins-Deutung durch relative Häufigkeiten. Wie viel Geld wirklich damit gespart wird, kann man nicht benennen. Dennoch erscheint eine der Varianten als kostenmäßig besser. Und sie wird besser sein auch unter Realbedingungen, die nicht allzu weit vom fingierten Szenario entfernt sind. In einer erweiterten Analyse wäre es durchaus angebracht, die hier gewonnene Lösung mit exponential verteilten Lebensdauern zu vergleichen. Daraus ergeben sich noch bessere Orientierungen, wo der Schwellenwert einer Entscheidung liegen kann.

Der Kostenvergleich ergibt 3,04 € Kosten pro Zeiteinheit für Einzellampen gegen 3,13 für Tandems. Allerdings, bereits bei einer geringen Preisminderung für Tandems (die ja sehr teuer sind) von 2,5 auf 2,4 (das sind 4%) kippt die Entscheidung zugunsten der Tandems (siehe die Lösungen im Anhang).

5. Abschließende Bemerkungen

Was die Bedeutung von inhaltlichen Vorstellungen anbelangt, so findet man einige Anregungen in Borovcnik (1992) oder in Kapadia und Borovcnik (1991). Fischbein hat an mehreren Orten auf die emotionale Gebundenheit solcher privater Vorstellungen und deren Einfluss auf das Verständnis stochastischer Begriffe hingewiesen.

Die einzusetzenden Methoden können jede Hilfe in punkto Berechnungen, welche theoretische Ableitungen umgehen, gebrauchen. Da bietet eine Tabellenkalkulation eine nicht zu unterschätzende Unterstützung. Gute Hinweise zum Gebrauch findet man immer bei E. Neuwirth oder bei Spreadsheets in Education. J. Meyer gibt auf Anfrage eigene Excel-Files, die in der Lehrerfortbildung erprobt sind, heraus. Bartz (2007) illustriert konkrete Verwendungen von Excel. Der Autor selbst hat wiederholt Excel-Files zu unterschiedlichen Themen angeboten (siehe Borovcnik 2001, 2002).

Die Eigenheit stochastischer Begriffsbildung kommt durch Aufgaben fast noch mehr zur Geltung als durch die Theoriebildung. Der Vorteil liegt auch darin, dass man die Künstlichkeit der Konzepte bei Beispielen eher erfassen kann, weil eben auch durch Rechenhilfen der Komplexitätsgrad gelegentlich etwas reduziert werden kann. Nicht zuletzt geben Beispiele und wie man diese bewältigen kann, einem

Lernenden Aufschluss, inwieweit die Begriffe schon verstanden worden sind. Ein interessanter Ansatz ist bei Lyso (2008) zu finden, der die Studierenden Items aus der empirischen Forschung zum Wahrscheinlichkeitsverständnis *vor* einer Unterweisung in der Mathematik der Begriffe eigenständig erarbeiten lässt. Dies bietet ihm eine gute Gelegenheit, später, in der Erörterung der mathematischen Einzelheiten auf hierbei geäußerte Missverständnisse zurückzugreifen, was zur Klärung beitragen kann.

Der angesprochene Szenario-Charakter von Wahrscheinlichkeitsmodellen zeigt, dass eine Untersuchung „als – ob“ gute Einsichten in die Problemstellung liefern kann, obwohl man weiß, dass das Szenario in wesentlichen Elementen die Wirklichkeit nicht gut abbildet. Dennoch kann man Zusammenhänge, etwa über relative Risiken etc. erkennen und damit Entscheidungen rational begründen.

Letztlich soll die Erkenntnis reifen, dass es keinen Zufall gibt. Es handelt sich bei Zufall nur um eine Form des Denkens über die Welt. Wir haben dabei auch noch zu beachten, dass wir mit engen Verflechtungen mit anderen Denkformen zu kämpfen haben. Wir können diese Denkform aber gelegentlich mit Vorteil einsetzen, um Entscheidungen besser und begründeter zu treffen.

Der Wert von Aufgaben zur konzeptuellen Durchdringung kann nicht unterschätzt werden. Aufgaben haben gegenüber theoretischen Exkursen und Erklärungen immer auch eine aktive Komponente. Man muss mit den Begriffen umgehen, das kann klären, ob man etwas schon ausreichend verstanden hat. Studierende fragen immer nach einer Probeklausur. Natürlich wird das auch missbraucht, indem sie auch davon ausgehen mögen, die Beispiele (auswendig) lernen zu sollen oder gar dies zu können. Dennoch bleibt an der eigenständigen Lösung von Aufgaben oder dem sinnvollen Nachvollzug von angebotenen Lösungen etwas hängen. Der Lernerfolg aus Aufgaben allerdings hängt ganz wesentlich von der Qualität der Aufgabenstellung ab.

Postludium

Die Behauptung, wonach es keinen Zufall gibt, mag angesichts der gänzlich anderen Positionen, die so manche Philosophen (u. a. Nietzsche) aber auch moderne Physiker (nicht Einstein) vertreten, mutig klingen. Es ist zwar nicht so, dass diese die Existenz von Zufall beweisen könnten; die Diskussion über den Status von Zufall ist aber noch immer im Schwelen; Philosophen wie auch Physiker haben dazu noch nicht das letzte Wort gesprochen, so dass ein abschließendes Urteil in dieser Frage nicht haltbar scheint. „Es gibt keinen Zufall“ hat also vielmehr den Charakter einer provokativen These. Wenn in der gängigen Diskussion Meinungen vertreten werden wie „die ganze Welt ist Zufall“, „der Zufall ist nicht wegzudenken“ etc., so bekommt die Auseinandersetzung beinahe einen religiösen Anstrich. Was den Autor daran so stört, ist der fehlende Gedanke an Alternativen und die vordergründige Ontologisierung der Frage.

i) Alternativen zulassen hilft im Verständnis. Schon im Lotto oder anderen Glücksspielen. Sonst kann es sein, dass Lernende die Begriffe nur äußerlich erwerben, aber privat bei ihren Ansätzen bleiben. Ist es wirklich Zufall, dass *ich* den Sechser (nicht) bekomme? Fällt mir da nicht eher etwas (durch das Schicksal) zu? Zufall als Wort ist mehrdeutig:

- Es kann einem etwas ohne (besonderen) Grund zufallen (so etwas kann auch als fair gedeutet werden; die römische Göttin Justitia steht dafür).
- Es kann einem etwas aus Laune der Glücksgöttin zufallen (Tyche im alten Griechenland wurde tatsächlich so gesehen, es scheint sich um eine archetypische Sichtweise zu handeln).
- Der Zufall (eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung) wurde realisiert und hat das so ergeben.

ii) Zufall wird in der aktuellen Diskussion fast so abgehandelt, als ob er real existierte; es wird dem Begriff quasi eine *ontologische* Existenz zugeschrieben. Das widerspricht aber einem modernen Theorieverständnis, wonach zwischen der Ebene der Theorie (mit den daraus resultierenden Modellen) und der damit zu beschreibenden Realität strikt zu trennen ist. Trotz der Durchdringung der Theorien moderner Quantenphysiker übersieht man, dass es auch alternative Ansätze (wie den der versteckten Variablen und weitere) gibt, die ohne Wahrscheinlichkeit (jedenfalls nicht in der so grundsätzlichen Weise) auskommen. Dass Zufall ein erfolgreiches Modell darstellt und in der Physik auch in Quantenmodellen erfolgreiche Prognosen stellen hilft, ja die ganze Theoriebildung erst aufbauen lässt, soll nicht darüber hinweg täuschen, dass es sich hierbei immer um Theorien (Theorie bedeutet Sichtweise) und nicht die Realität handelt.

Ontologische Existenz von Zufall ist wohl der rationalen Diskussion zugänglich, aber nicht mit Mitteln rationaler Argumente „beweisbar". Zufall als Konzept ist erfolgreich. Unbestritten! So die Ansicht des Autors. Wenn man in der Praxis aber ein Problem behandelt, so könnte man es statt mit Zufall vielleicht besser mit Differentialgleichungen behandeln und auf die inneren Zusammenhänge eingehen. Man kann vielleicht auch aus der Analyse der Daten etwa mit Methoden der Multiplen Regression – äußerlich – Zusammenhänge erkennen und als Lösung einsetzen. In der Quantenphysik scheint im Moment ein alternativer Ansatz – zumindest was dessen Akzeptanz in der „Community" anbelangt – zu fehlen. Siehe jedoch weiter oben, es gibt diese Ansätze.

Der Autor möchte an dieser Stelle Herrn Reinhard Winkler für die umsichtige und kritische Diskussion des Artikels herzlich danken. Seine Anmerkungen haben wesentlich zur Verbesserung der Darlegung der Gedanken beigetragen.

Literatur

Bartz, S. (2007): Excelblatt vereinfacht Stochastik. *Stochastik in der Schule* 27 (2), 25-29.

Borovcnik, M. (1992): Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik. Mannheim: BI.

Borovcnik, M. (2001): Nützliche Gesetze über den Zufall – Experimente mit Excel. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik der Österr. Math. Ges. 32, 1-22.

Borovcnik, M. (2002): EXCELlent Statistics – Statistik mit Unterstützung von Tabellenkalkulation. *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik der Österr. Math. Ges.* 33.

Borovcnik, M. (2006): Probabilistic and statistical thinking. In M. Perpinan, & M. A. Portabella (Hsg.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 484–506). Barcelona: IQS Fundemi. On line: http://ermeweb.free.fr/CERME4/ .

Borovcnik, M., & Bentz, H.-J. (1990, 2003): Intuitive Vorstellungen von Wahrscheinlichkeitskonzepten : – Fragebögen und Tiefeninterviews. Klagenfurt: Projektbericht.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J. (1991): Empirical research in understanding probability. In R. Kapadia, M. Borovcnik (Hsg.), *Chance Encounters* (S. 73–106). Dordrecht: Kluwer.

David, F. N. (1962): *Games, Gods and gambling*. London: Charles Griffin.

Dürr, D., Goldstein, S., Tumulka, R., & Zanghi, N. (2004): Bohmian mechanics and quantum field theory. *Physical Review Letters* 93. On line: http://arxiv.org/abs/quant-ph/0303156.

Falk, R. (1986): Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson, & J. Swift (Hsg.), *Proc. Second International Conference on Teaching Statistics* (S. 292-297). Victoria: University of Victoria. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=icots2.

Fischbein, E. (1975): *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.

Fischbein, E. (1987): *Intuitions in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: D. Reidel.

Gigerenzer, G. (2002): *Calculated risks: How to know when numbers deceive you*. New York: Simon & Schuster.

Kapadia, R., & Borovcnik, M. (1991): *Chance encounters: Probability in education*, Dordrecht: Kluwer.

Kiaer, A. N. (1899): Die repräsentative Untersuchungsmethode. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 5, 1–22.

Lyso, K. (2008): Strengths and limitations of informal conceptions in introductory probability courses for future lower secondary teachers. *Proc. Topic Study Group 13 "Research and development in the teaching and learning of probability"*. Monterrey: ICME 11. On line: http://tsg.icme11.org/tsg/show/14.

Meyer, J. (o. J.): *Excel-Files in der Lehrerfortbildung*. Auf Anfrage: J.M.Meyer@t-online.de

Neuwirth, E.: http://sunsite.univie.ac.at/mailman/listinfo/Improve-excel

Peard. R. (2008): Teaching the Mathematics of Gambling to Reinforce Responsible Attitudes towards Gambling. *Proc. Topic Study Group on "Research and Development in the Teaching and Learning of Probability"*, ICME 11. Online: http://tsg.icme11.org/tsg/show/14.

Popper, K. (2005, 1935): *Logik der Forschung* (Hrsg. H. Keuth, M. Siebeck), Tübingen. Original: Wien: Springer 1935.
Online: https://www.uni-rostock.de/fakult/philfak/fkw/iph/strobach/hroseminare/modul/popper.html.

Spreadsheets in Education: http://www.sie.bond.edu.au/

Styer, D. F. (2000): *The strange world of quantum mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.

vos Savant, M. (o. J.): *Game show problem*. Online: http://www.marilynvossavant.com/articles/gameshow.html.

Wassner, C., Krauss, S., Martignon, L. (2002): Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? *Praxis der Mathematik* 44 (1), 12-16.

Anhang: Exemplarische Lösungen mit einer Tabellenkalkulation

Modellierung der Poolbildung und Berechnung der erwarteten Kosten

G / S		gut/schlecht = Einzelprobe ist für die Aufbereitung geeignet / nicht geeignet
n	3	Zahl der Blutproben, die zu einem Pool zusammen gefasst werden.
X ~ Bin(n, π)		Modell für Anzahl X der geeigneten Einzelproben im Pool: Ziehen mit Zurücklegen
π	0,9	Wahrscheinlichkeit, dass eine Einzelprobe für die Aufbereitung geeignet ist
Y		Anzahl der durch Poolbildung zerstörten Einzelproben
2*20	40	Prüfersparnis durch Poolbildung: 1 statt 3 Einzelproben prüfen
	50	Kosten einer durch Poolbildung zerstörten Probe

X	0	1	2	3	
Y	0	1	2	0	
C Kosten	0	50	100	0	$E(Z) = \Sigma\, z_i{*}p_i$
Z=Gewinn – C	40	-10	-60	40	
Ws.	0,001	0,027	0,243	0,729	**Erwarteter Gewinn =**
z*p	0,04	-0,27	-14,58	29,16	14,35

Anwendungen Binomialverteilung - Ersparnis durch Mischen von Prüfeinheiten

Prüfkosten	Wert Probe	Anteil verwertbarer Proben p	Poolgröße n			
20	50	0,90	3			
k	P(k)	Ersparnis Pool	Kosten zerstörter Proben	Netto-ersparnis	$x_i * p_i$	E(Nettoersp.)
0	0,0010	40	0	40	0,0400	
1	0,0270	40	-50	-10	-0,2700	
2	0,2430	40	-100	-60	-14,5800	
3	0,7290	40	0	40	29,1600	
4	#ZAHL!	40	0	40	0,0000	
5	#ZAHL!	40	0	40	0,0000	14,35

Beantwortung der Fragen mit den Gesprächskosten durch Simulation

Nr.	gleichverteilte Zufallszahlen	λ = 0,5 Exponential-verteilte mit λ	Kosten	Dauer 100 Gespräche	Rechnung Kosten 100 Gespräche	leere Spalte!	viele Rechnungen	Indikator		
	Z_i	X_i	$k(X_i)$				1037,60	0		
1	0,725	2,582	10,00	189,78	1037,60		1023,89	0		
2	0,851	3,806	10,00				1032,41	0		
3	0,677	2,261	10,00				1026,03	0		
4	0,547	1,584	10,00				1030,60	0	Zeilen	
712	0,780	3,029	10,00				1055,41	0	ausgeblendet	
713	0,449	1,191	10,00				1027,51	0		
714	0,461	1,235	10,00				1013,39	0		
							1050,62	0		
							1024,71	0		
		1,99	10,37	Mittel = erwartete Kosten			1054,06	0		
	0,990	10,08	20,15	Quantil			1030,63	0		
							1045,80	0		
							Rechnung >	1060	0,064	Anteil >
								0,99	1078,2	Quantil

Die erwarteten Kosten eines Gesprächs sind 10,37
Risiko beträgt 0,010 dass Gespräch mehr kostet als 20,15

Risiko, dass Rechnung bei 100 Gesprächen mehr kostet als 1060,00
beträgt: 0,064

Risiko beträgt 0,010 dass Rechnung mehr kostet als 1078,16

Die simulierten Ergebnisse schwanken noch einigermassen und sind ungenau. Simuliert man mehr als 714 Daten, so werden die Ergebnisse sehr genau.

Normalverteilung - Standardisieren - Ws. Berechnen

$P(a \le X \le b) = \Phi((b-\mu)/\sigma) - \Phi((a-\mu)/\sigma)$ Wenn $\Phi((a-\mu)/\sigma) = p$, dann ist $(a-\mu)/\sigma = u_p$ das p-Quantil

μ	σ	x	$(x-\mu)/\sigma$	$\Phi(..)$		Ws. für X	
900	200	1300	2	0,97725		$\le$ 1300	a)
		c	$(c-\mu)/\sigma$	$\Phi((c-\mu)/\sigma)$	0,6667	wegen der Vorgabe	
		Daher:	$(c-\mu)/\sigma$ =	2/3-Quantil =	0,4307		
		Daraus berechnet man:		c =	986,1455		b)

b) optional		c	Stellt c am Regler ein,
	8615	986,1500	bis man gewünschte Ws. von 2/3 für Unterschreiten von c erhält.
900	200	986,1500	0,43075 / 0,66667

μ	σ	x	$(x-\mu)/\sigma$	$\Phi(..)$		Ws. für X	
1800	282,84	2600	2,83	0,99766		$\le$ 2600	c_a)
		c	$(c-\mu)/\sigma$	$\Phi(c-\mu)/\sigma$	0,6667	wegen der Vorgabe	
		Daher:	$(c-\mu)/\sigma$ =	2/3-Quantil =	0,4307		
		Daraus berechnet man:		c =	1921,8281		c_b)

Kostenvergleich

	€ /Stück	Lampen	Tausch	Sum. kosten	Zeit	Kosten/Zeit	
Einzellampen	1	2000	1000	3000	986,1	3,04	} d)
Tandems	2,5	2000	1000	6000	1921,8	3,12	
Variante	2,4	2000	1000	5800	1921,8	3,02	

Nach gegenwärtigen Daten ist die Verwendung von Einzellampen etwas besser
Wären die Tandems etwas billiger, so würde die Entscheidung kippen.